Παράδειγμα 1

Για το $F(x,y,z)=(x,y,z)$ διανυσματικό πεδίο

τότε $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z} = 3$

Παράδειγμα 2:

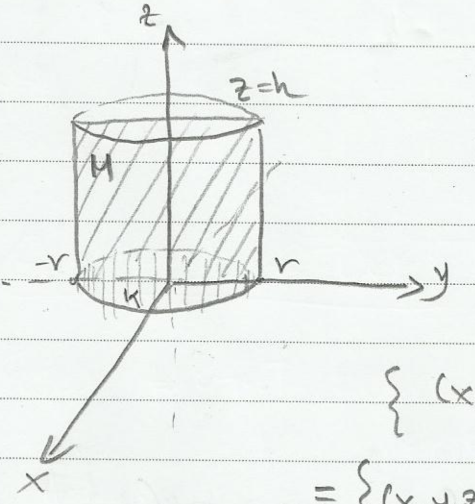
για τον κύλινδρο $x^2+y^2\le r$ που περικλείεται στο $z=0$ και $z=h$ έχουμε ότι μπορεί να είναι κανονικό ως προς xy, xz, yz. Έστω ως προς xz:

$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,z)\in M : \psi_1(x,z)\le y\le \psi_2(x,z)\}$

με $M=[-r,r]\times[0,h]$ και $\psi_1(x,z)=-\sqrt{r^2-x^2}$ και

$\psi_2(x,z)=+\sqrt{r^2-x^2}$

Σχηματικώς:



Το "τοίχωμα" του V δίνεται:

① $\partial K=\gamma([\alpha,\beta])$ με

$\gamma(t)=(r\cos t, r\sin t)$

② το "τοίχωμα" του V είναι το:

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: (x,y)\in\partial K : \varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)\} =$

$=\{(x,y,z): 0\le z\le h \ \& \ (x,y)=(r\cos t, r\sin t)\ t\in[0,2\pi]\}$

Άρα,

"τοίχωμα" του V $=\Phi(t,z)=\begin{pmatrix} r\cos t\\ r\sin t\\ z\end{pmatrix}$, $t\in[0,2\pi]$ και $z\in[0,h]$

$\frac{\partial\varphi(t,z)}{\partial t}\times\frac{\partial\varphi(t,z)}{\partial z} =$

$= \begin{vmatrix} e_1&e_2&e_3\\ -r\sin t& r\cos t&0\\0&0&1\end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t\\ r\sin t\\0\end{pmatrix}$

με μοναδιαίο (κυκλικό) κάθετο το ίδιο με το $N(\varphi(t,z))$.

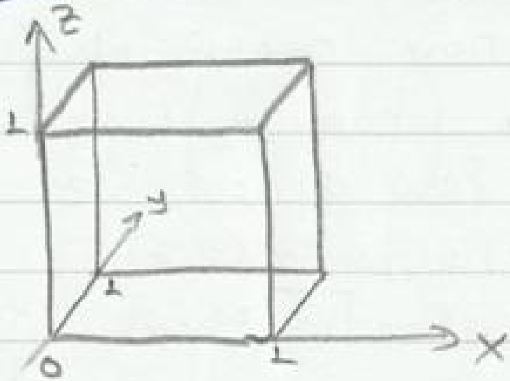
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int_S (4xz, -y^2, yz)\cdot n \, d\sigma$$

με S η επιφάνεια του κύβου $[0,1]^3$ και n το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο

ΛΥΣΗ



$$I \overset{\text{Gauss}}{=} \int_{[0,1]^3} \nabla\cdot(4xz, -y^2, yz)\, d(x,y,z)$$

$$= \int_{[0,1]^3} (4z-2y+y)\, d(x,y,z) =$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (4z-2y+y)\, dx\,dy\,dz$$

Υπολογίζω το $I=\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (4z-y)\, dx\, dy\, dz$

$$\int_0^1 (4z-y)\,dx = (4z-y)\int_0^1 1\,dx = (4z-y)\cdot[x]_0^1 = 4z-y$$

άρα $I=\int_0^1\int_0^1 (4z-y)\,dy\,dz$

$$\int_0^1 (4z-y)\,dy = \left[4zy-\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 4z-\frac{1}{2}+0-0$$

άρα $I=\int_0^1\left(4z-\frac{1}{2}\right)dz = \left[4\cdot\frac{z^2}{2}-\frac{1}{2}z\right]_0^1 = 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$